UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI SCIENZE AGRARIE E AMBIENTALI
PRODUZIONE, TERRITORIO, AGROENERGIA

Metodi Statistici per la Ricerca Ambientale

Marco Acutis

marco.acutis@unimi.it

www.acutis.it

a.a. 2019 - 2020

CdS Scienze Agro-Ambientali (g57)

Lezione 03 - Sommario

- Analisi della Varianza
  - ANOVA a 2 o più vie

Definizione

L'analisi della varianza a 1 via è lo schema più semplice di confronto simultaneo tra più medie. Nella pratica sperimentale spesso però rappresenta un'impostazione troppo elementare: infatti, in modo implicito, assume che tutta la variabilità presente nei diversi gruppi a confronto sia determinata dai differenti livelli del singolo fattore in osservazione.

Sovente è utile, quando non necessario, prendere in considerazione almeno due fonti di variabilità, allo scopo di:

- analizzare gli effetti di due o più cause contemporaneamente,
- ridurre la varianza d'errore, isolando gli effetti dovuti ad altre cause note.

Analisi della Varianza a 2 o più vie (o Fattoriale)

Analisi della Varianza - Il caso a 2 o più vie

Pro & Contro

Pro

- studio contemporaneo dell'effetto di 2 o più fattori
- identificazione dell'interazione tra fattori
- maggiore potenza

Contro

- difficoltà con esperimenti sbilanciati
- difficoltà d'interpretazione (se i fattori sono più di 2)
- complessità dei calcoli (trascurabile)

L'ANOVA a 2 o più vie è da preferire per esperimenti finalizzati all'identificazione dell'effetto di specifici trattamenti, mentre è meno efficace nell'analisi di sistemi reali.

Interazione tra Fattori

Tra 2 (o più) fattori applicati contemporaneamente può esservi:

indifferenza → I fattori esercitano il loro effetto senza variazioni dovute al livello degli altri fattori (comportamento additivo).

sinergismo → La presenza contemporanea di determinati livelli dei fattori migliora il risultato rispetto alla semplice additività.

antagonismo → La presenza contemporanea di determinati livelli dei fattori peggiora il risultato rispetto alla semplice additività.

Comportamenti sinergici o antagonistici indicano **INTERAZIONE** tra i fattori.

Esempio di Interazione (1/2)

Esempio (didattico) con 2 fattori, ciascun con 2 livelli

	Livello 0	Livello 1
N (Kg ha^{-1})	0	100
P_2O_5 (Kg ha^{-1})	0	60

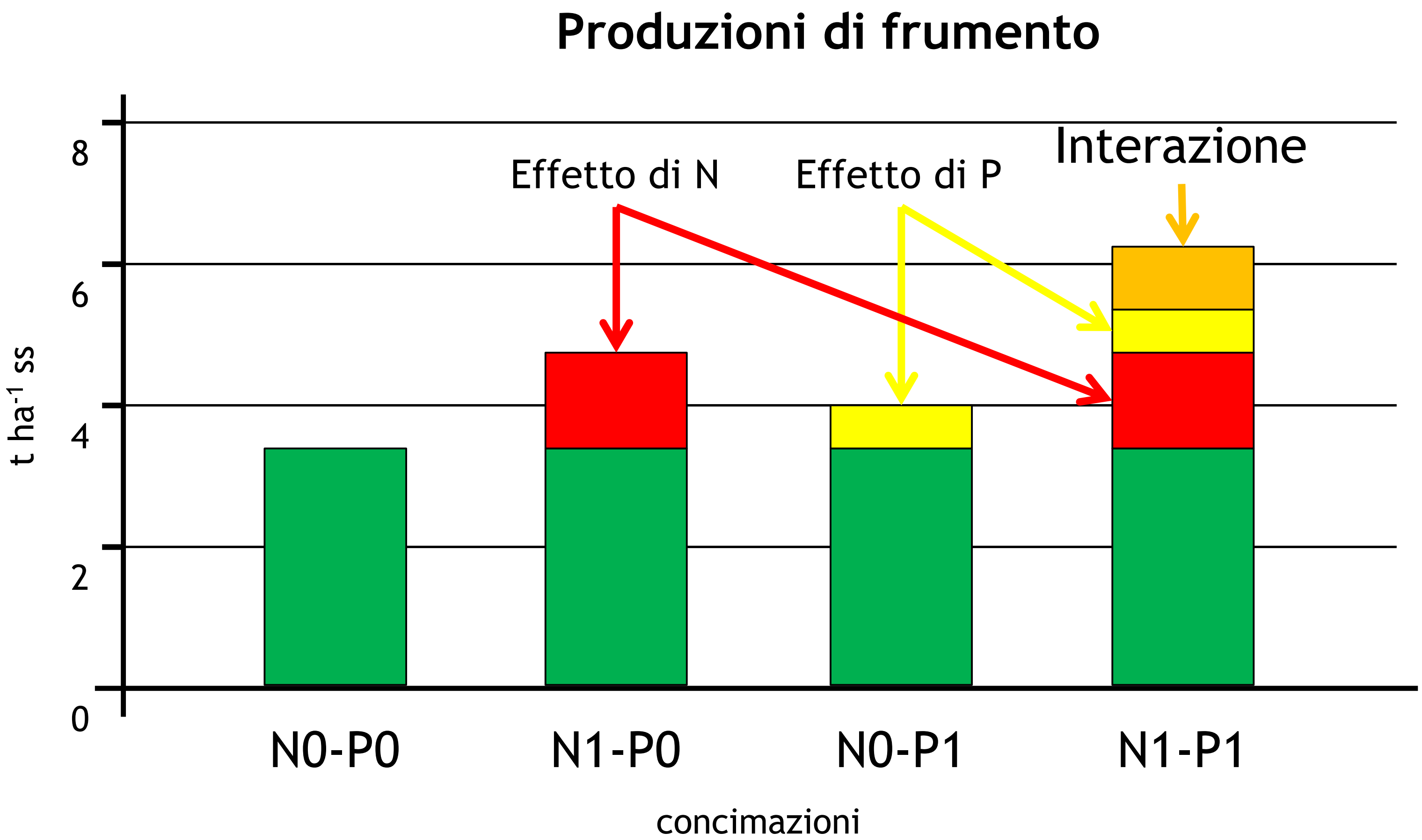
Le combinazioni possibili tra i livelli dei fattori sono N0-P0, N0-P1, N1-P0 e N1-P1.

Per ciascuna combinazione sono state effettuate 3 ripetizioni.

Le combinazioni vanno considerate come se fossero singoli trattamenti nell'ANOVA a 1 via.

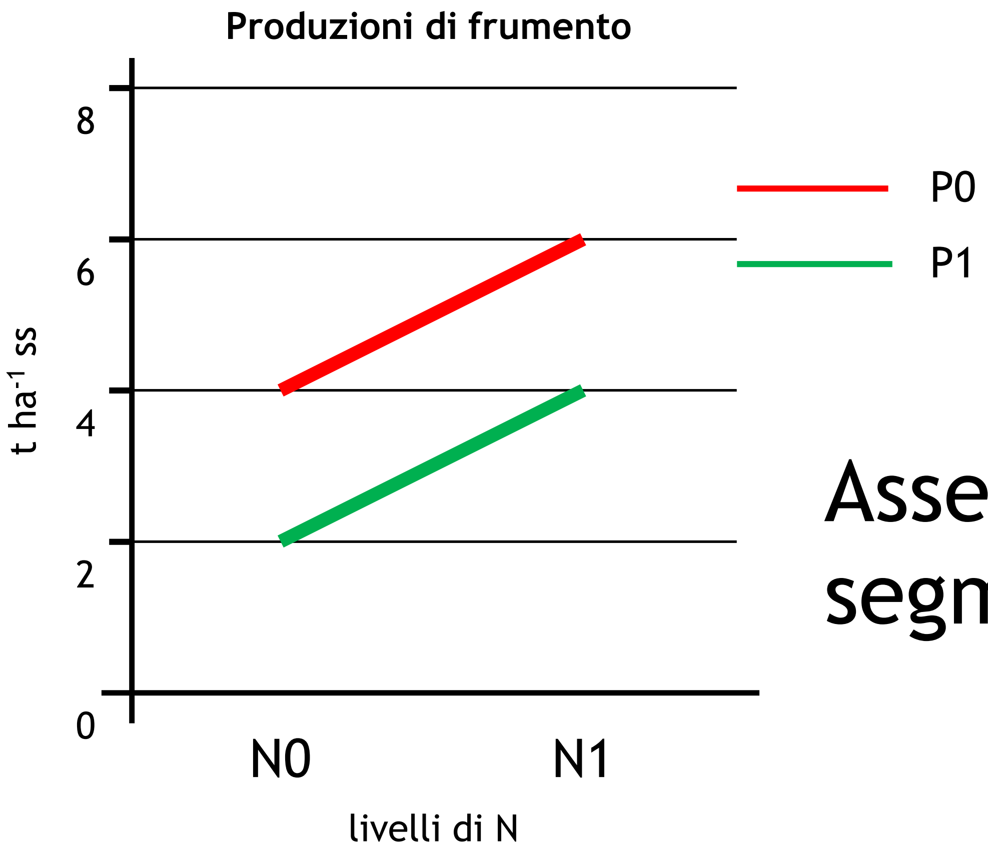
Obiettivo della sperimentazione è quello di valutare l'effetto contemporaneo dei due fattori sulla produzione di frumento.

Esempio di Interazione (2/2)



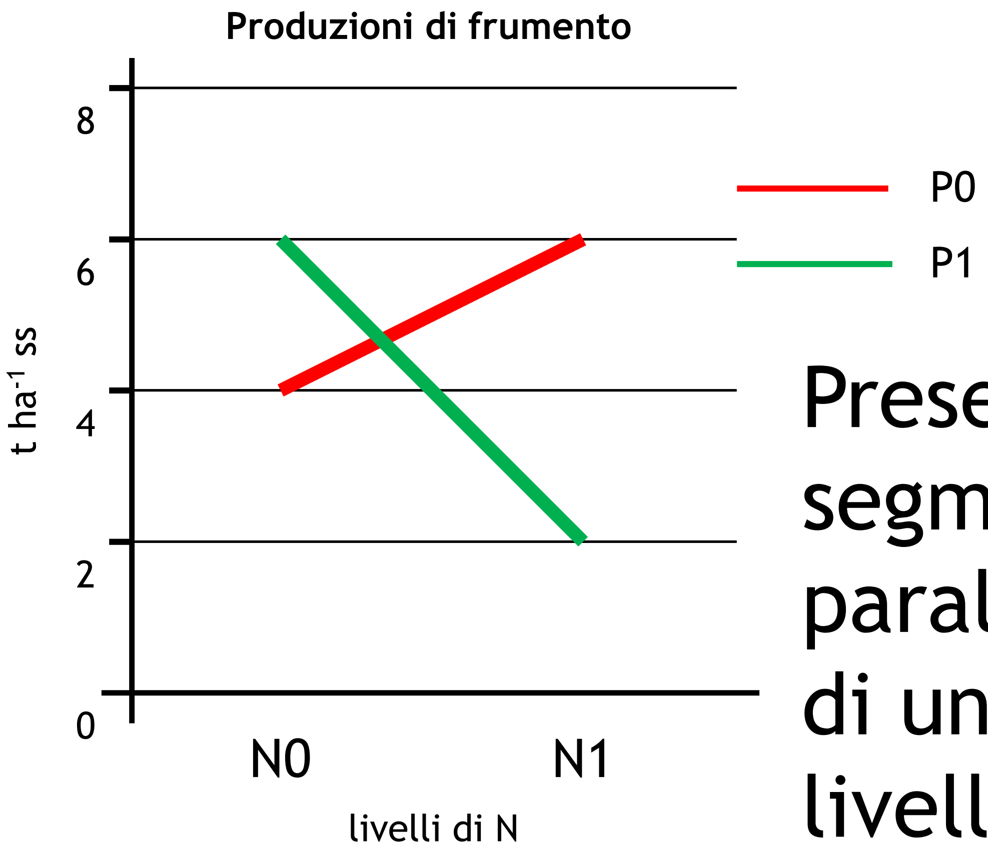
Analisi della Varianza - Il caso a 2 o più vie

Visualizzazione dell'Interazione (1/2)



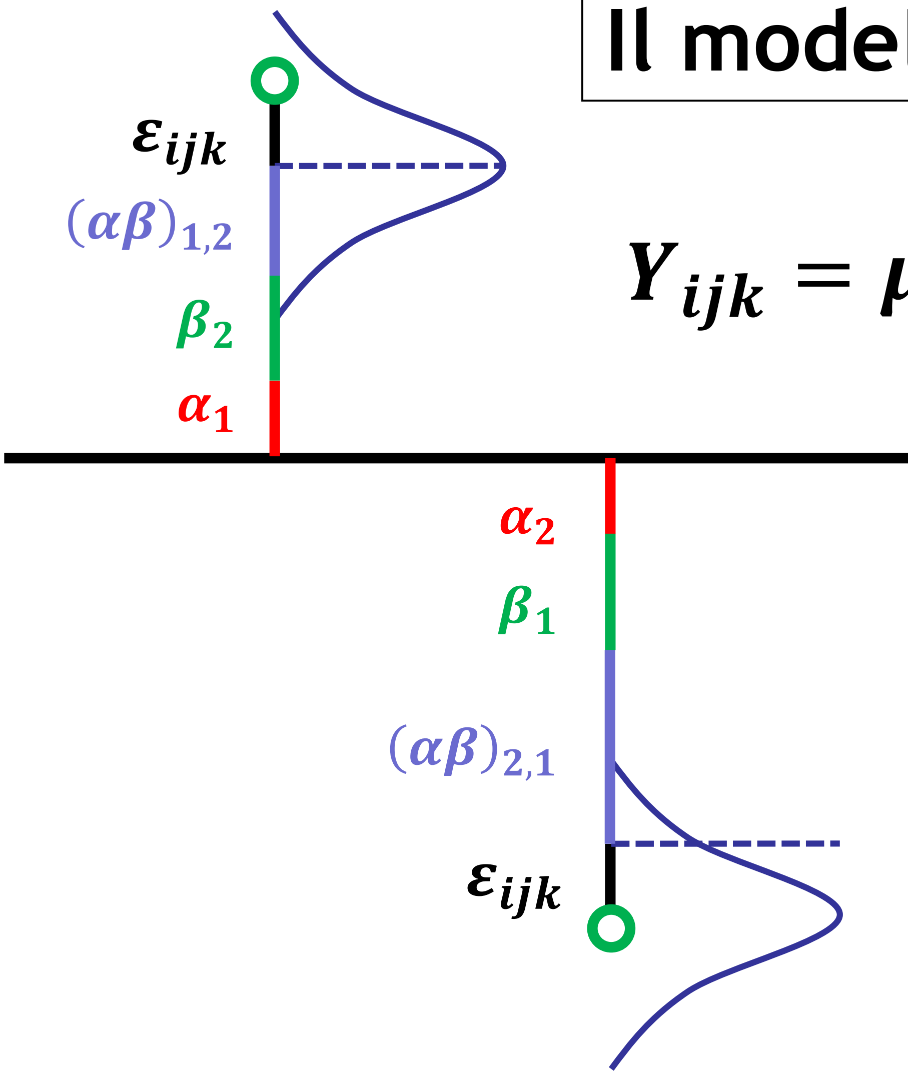
Assenza di interazione: i segmenti sono paralleli!

Visualizzazione dell'Interazione (2/2)



Presenza di interazione: i segmenti NON sono paralleli, poiché l'effetto di un fattore dipende dal livello dell'altro.

Il modello a 2 vie



$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Il valore di un dato Y_{ijk} è la **somma** dell'**effetto** di uno specifico **livello** del **1° fattore** (α_i), dell'**effetto** di uno specifico **livello** del **2° fattore** (β_j), della loro interazione $\left((\alpha\beta)_{ij}\right)$ e di una **componente accidentale** (ε_{ijk}), tenuto conto della media generale μ.

Generalizzazione

Gli effetti dovuti a un **singolo fattore** sono anche detti **effetti semplici** o di **primo ordine**, quelli dovuti **all'interazione tra 2 fattori** sono detti effetti di **secondo ordine**, quelli dovuti all'**interazione tra 3 fattori** sono detti effetti di **terzo ordine** e via discorrendo.

Al crescere del numero dei fattori, il modello matematico dell'Anova Fattoriale diventa subito molto complesso:

con k fattori occorre infatti sommare, oltre alla media generale e alla componente accidentale, k effetti semplici, $\binom{k}{2}$ effetti del 2° ordine, $\binom{k}{3}$ effetti del 3° ordine, …, $\binom{k}{k-1} = k$ effetti del $(k-1)$-esimo ordine, $\binom{k}{k} = 1$ effetto del k-esimo ordine.

Con 4 fattori, parliamo già di 17 addendi…

Quando il modello tiene conto di tutti questi elementi, parliamo di modello **fattoriale completo**.

Osservazioni

- ✓ Normalmente ci si limita a considerare il caso di ANOVA a 2 o 3 vie, per l'impossibilità pratica di interpretare interazioni troppo complesse.

- ✓ È sempre opportuno che il numero di repliche sia uguale per ogni fattore e livello del fattore (**esperimento bilanciato**). In questo caso infatti si garantisce la massima potenza del test statistico e l'unicità della soluzione numerica nel caso di ANOVA a più vie.

Ipotesi nulla

Consideriamo il caso di un'ANOVA a 2 vie, in cui quindi sono presenti due fattori: A (p livelli) e B (q livelli).

Nel modello fattoriale completo corrispondente a questa situazione si possono verificare 3 ipotesi distinte:

1) nessuna differenza tra le medie di A

$$H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_p$$

2) nessuna differenza tra le medie di B

$$H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_q$$

3) nessuna interazione tra i fattori A e B

$$H_0: AB_{ij} = 0, \forall i, j$$

Esecuzione dei calcoli (1/6)

Ipotizziamo di avere un esperimento bilanciato con r **repliche**.

Passo 1: stimare la devianza errore e la devianza dovuta ai trattamenti

eseguiamo gli stessi calcoli necessari per l'ANOVA a 1 via, considerando le combinazioni come fossero singoli trattamenti

$$dev_{TOT} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} \left(x_{ijk} - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

$$dev_{ERR} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} \left(x_{ijk} - \bar{X}_{ij}\right)^2$$

$$dev_{TRA} = dev_{TOT} - dev_{ERR}$$

N.B. $\bar{\bar{X}}$ è la **media generale**, mentre $\bar{X}_{ij}$ è la media calcolata in corrispondenza della **combinazione** dell'**i-esimo livello** del trattamento **A** con il **j-esimo livello** del trattamento **B.**

Esecuzione dei calcoli (2/6)

una volta ottenute la devianza dei trattamenti nel loro complesso dev_{TRA} (utile successivamente) e la devianza errore dev_{ERR}, calcoliamo i gdl corrispondenti e, di conseguenza, le rispettive varianze

$$gdl_{TOT} = pqr - 1 \longrightarrow {s^2}_{TOT} = \frac{dev_{TOT}}{pqr - 1}$$

$$gdl_{ERR} = pqr - pq \longrightarrow {s^2}_{ERR} = \frac{dev_{ERR}}{pqr - pq}$$

$$gdl_{TRA} = gdl_{TOT} - gdl_{ERR} = pq - 1 \longrightarrow {s^2}_{TRA} = \frac{dev_{TRA}}{pq - 1}$$

Esecuzione dei calcoli (3/6)

Passo 2: stimare le varianze dovute agli effetti semplici

consideriamo l'esperimento come se fosse presente un solo fattore (A)

si hanno quindi rq unità sperimentali che hanno ricevuto un determinato livello del trattamento A

per calcolare la devianza del fattore A è allora sufficiente sostituire ogni dato con la media del livello di A cui appartiene e calcolare la devianza di tutti i dati così ottenuti:

$$dev_A = rq\sum_{i=1}^{p}\left(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}\right)^2 \longrightarrow {s^2}_A = \frac{dev_A}{p-1}$$

In maniera del tutto analoga si procede per il fattore B

Esecuzione dei calcoli (4/6)

Passo 3: stimare la varianze dovuta all'interazione

la via più semplice è per differenza:

$$
\begin{cases}
dev_{INT} = dev_{TRA} - dev_A - dev_B \\
gdl_{INT} = gdl_{TRA} - gdl_A - gdl_B \\
s^2{}_{INT} = \dfrac{dev_{INT}}{gdl_{INT}}
\end{cases}
$$

dev_{INT} si può anche calcolare indipendentemente (il che può essere utile nel caso di ANOVA a 3 o più vie):

1. ponendo ogni dato uguale al valore medio della combinazione cui appartiene,
2. sottraendo a ogni dato i valori medi del livello del fattore cui si riferisce,
3. calcolando la devianza dei dati così ottenuti.

N.B. $gdl_{INT} = pq - 1 - (p-1) - (q-1) = (p-1)(q-1)$

Esecuzione dei calcoli (5/6)

Passo 4: impostare la tabella dell'ANOVA

Fonti di variazione	Devianze	gdl	Varianze	F calcolato	P(F)
Totale	dev_{TOT}	$pqr-1$			
Trattamenti	dev_{TRA}	$pq-1$	$s^2{}_{TRA}$	$s^2{}_{TRA}/s^2{}_{ERR}$	
Fattore A	dev_A	$p-1$	$s^2{}_A$	$s^2{}_A/s^2{}_{ERR}$	
Fattore B	dev_B	$q-1$	$s^2{}_B$	$s^2{}_B/s^2{}_{ERR}$	
Interazione AxB	dev_{INT}	$(p-1)(q-1)$	$s^2{}_{INT}$	$s^2{}_{INT}/s^2{}_{ERR}$	
Errore	dev_{ERR}	$pqr-pq$	$s^2{}_{ERR}$		

N.B. Se A e B sono fattori **fissi**, il test di tutti gli effetti si fa contro l'errore!

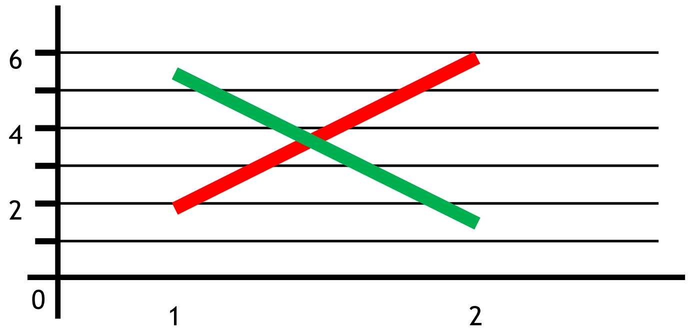
Esecuzione dei calcoli (6/6)

Passo 5: interpretazione

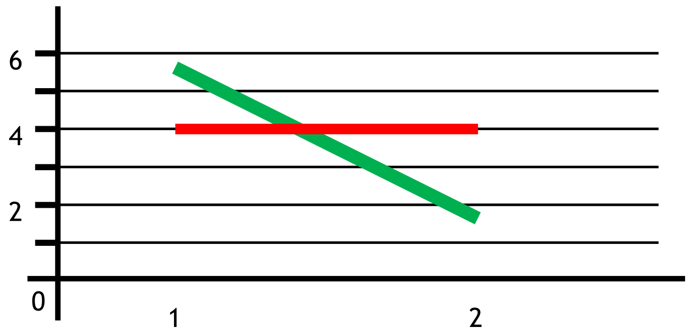
Occorre osservare innanzitutto la significatività dell'interazione: se l'effetto interattivo è significativo, allora va considerata solo l'interazione e NON È LECITA ALCUNA CONCLUSIONE SUGLI EFFETTI SEMPLICI. Infatti in presenza di interazione, l'effetto di un fattore è condizionato dal livello dell'altro.

Analisi della Varianza - Il caso a 2 o più vie

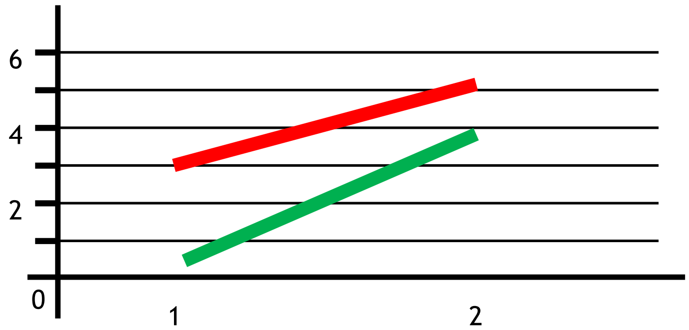
Esempi



Interazione e 2 effetti semplici significativi.



Interazione e 1 solo effetto semplice significativi.



Interazione e effetti semplici significativi. L'interazione, in questo caso, **<u>può</u>** avere valore pratico trascurabile.

Esempio di calcolo (1/4)

Consideriamo l'esempio (didattico) presentato in precedenza.

Dataset

	r1	r2	r3	media
N0-P0	4,0	4,9	4,3	4,4
N0-P1	4,2	5,5	5,9	5,2
N1-P0	5,2	5,2	5,8	5,4
N1-P1	6,6	7,2	7,8	7,2

sostituiamo ogni dato con la media

Calcolo dev_{TRA}

	r1	r2	r3
N0-P0	4,4	4,4	4,4
N0-P1	5,2	5,2	5,2
N1-P0	5,4	5,4	5,4
N1-P1	7,2	7,2	7,2

$$dev_{TRA} = 12{,}57$$

$$gdl_{TRA} = 3$$

$$dev_{TOT} = 15{,}53$$

$$gdl_{TOT} = 11$$

$$dev_{ERR} = 15{,}53 - 12.57 = 2{,}96$$

$$gdl_{ERR} = 11 - 3 = 8$$

$$s^2{}_{ERR} = 2{,}96/8 = 0{,}37$$

Esempio di calcolo (2/4)

Tabella delle medie

	P0	P1	media
N0	4,4	5,2	4,8
N1	5,4	7,2	6,3
Media	4,9	6,2	

Calcolo della devianza dovuta all'effetto N (ogni dato è sostituito con la media del corrispondente livello di N)

N0	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8
N1	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3

Devianza N = 6,75

gdl=1

Calcolo della devianza dovuta all'effetto P (ogni dato è sostituito con la media del corrispondente livello di P)

P0	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9
P1	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2

Devianza P = 5,07

gdl=1

Esempio di calcolo (3/4)

Calcolo della devianza dovuta all'interazione

$$dev_{INT} = dev_{TRA} - dev_N - dev_P \qquad gdl_{INT} = gdl_{TRA} - gdl_N - gdl_P$$

oppure

	r1	r2	r3
N0-P0	4,4	4,4	4,4
N0-P1	5,2	5,2	5,2
N1-P0	5,4	5,4	5,4
N1-P1	7,2	7,2	7,2

\-

	r1	r2	r3
N0	4,8	4,8	4,8
N0	4,8	4,8	4,8
N1	6,3	6,3	6,3
N1	6,3	6,3	6,3

\-

	r1	r2	r3
P0	4,9	4,9	4,9
P1	6,2	6,2	6,2
P0	4,9	4,9	4,9
P1	6,2	6,2	6,2

=

=

-5,3	-5,3	-5,3
-5,8	-5,8	-5,8
-5,8	-5,8	-5,8
-5,3	-5,3	-5,3

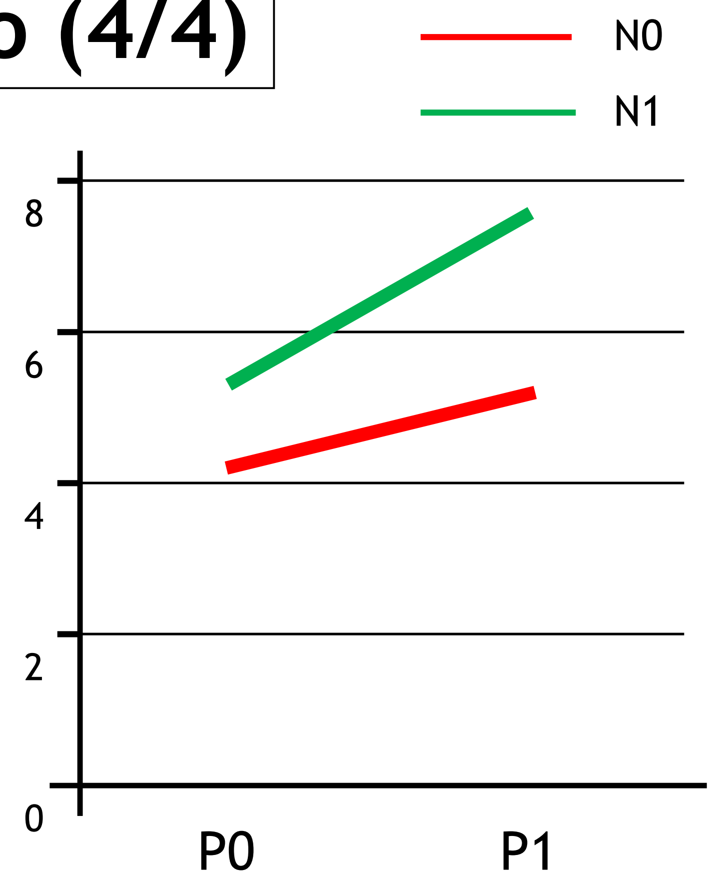
$$dev_{INT} = 0{,}75$$

$$gdl_{INT} = 1$$

Esempio di calcolo (4/4)

Tabella ANOVA

Fonti di variazione	Devianze	gdl	Varianze	F calcolato	P(F)
Totale	15,5	11			
Trattamenti	12,6	3	4,9	11,32	0,003
Fattore N	6,8	1	6,75	18,24	**0,003**
Fattore P	5,1	1	5,07	13,70	**0,008**
Interazione NxP	0,8	1	0,75	2,03	**0,192**
Errore	2,96	8	0,37		



Nonostante un'apparente divergenza, i due segmenti sono da considerarsi paralleli in senso statistico: $P(F_{INT}) = 0,2$ non fornisce evidenze sulla presenza di interazione. Al contrario, l'effetto migliorativo del P e dell'N è significativo.