UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

DIPARTIMENTO DI SCIENZE AGRARIE E AMBIENTALI

PRODUZIONE, TERRITORIO, AGROENERGIA

Metodi Statistici per la Ricerca Ambientale

Marco Acutis

marco.acutis@unimi.it

www.acutis.it

a.a. 2019 - 2020

CdS Scienze Agro-Ambientali (g57)

Lezione 01 - Sommario

- Introduzione
- Pre-requisiti:
  - Scale di misura
  - Statistica Descrittiva
- Statistica Inferenziale
  - Introduzione
  - Obiettivi
  - Distribuzioni
  - Stima puntuale dei parametri
  - Stima per intervalli dei parametri

Introduzione

Struttura del Corso

Lezioni frontali: 32 ore – 4 CFU
Esercitazioni in aula informatizzata: 32 ore – 2 CFU
(utilizzo del software di analisi statistica SPSS)

Modalità d'Esame

- prova scritta con domande a risposta chiusa + 1 domanda a risposta aperta
- Elaborazione di un dataset con il software SPSS
- prova orale (breve)

Introduzione

APPELLI:

Prenotazione obbligatoria tramite SIFA

2 appelli a fine corso (gennaio-febbraio)
1 appello nella sospensione delle lezioni del 2° semestre
2 appelli a fine corsi del 2° semestre (giugno-luglio)
2 appelli a settembre
1 appello nella sospensione delle lezioni del 1° semestre (anno 2020)

Testi consigliati

- Soliani L., Statistica applicata alla ricerca biologica e ambientale, UNI. NOVA Parma, 2003
- Quinn G.P. and Keough M.J., Experimental Design and Data Analysis for Biologists, Cambridge University Press, New York, 2002

Scale di misura delle variabili

Qualitative: nominali o ordinali

- l'unico parametro valutabile è la proporzione

Quantitative: intervalli o rapporti

- possono essere eseguiti dei calcoli, i parametri valutabili sono molti (statistiche descrittive numeriche: misure di posizione e di dispersione)
- possono essere discrete o continue

Statistica Descrittiva

Obiettivo: descrivere e sintetizzare i dati osservati attraverso grafici (es. distribuzioni di frequenza), indici di posizione e dispersione

Indici di posizione (1/3)

Indicano la tendenza centrale di un insieme di dati

Media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

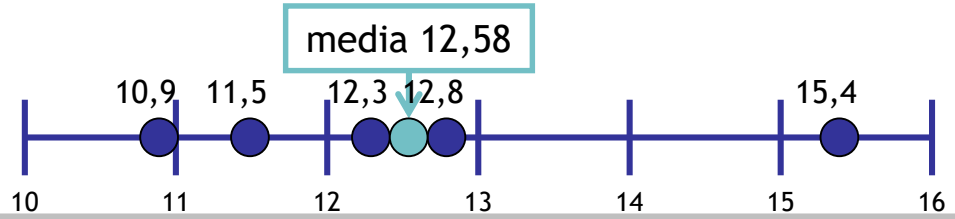
Proprietà della media aritmetica:

1) la sommatoria degli scarti di ogni dato dalla media (momento di I ordine) è nulla;

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \qquad (x_1 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = 0$$

2) la sommatoria del quadrato degli scarti (momento di II ordine) è minima (ovvero non esiste alcun altro punto che, sostituito alla media, dia un valore inferiore).

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = min$$



Indici di posizione (2/3)

se i dati sono espressi come frequenze:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

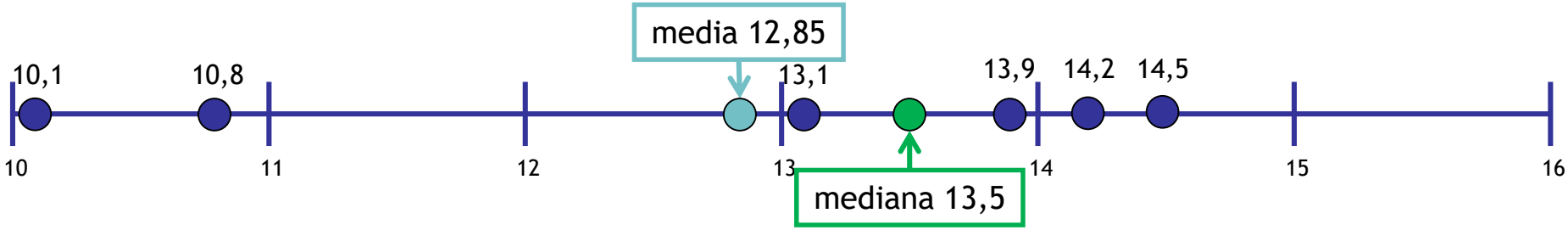
media aritmetica ponderata

se i dati sono espressi come proporzioni:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Indici di posizione (3/3)

Mediana: divide la serie ordinata in due parti di uguale numerosità



Moda: è il valore della classe a cui corrisponde la maggiore frequenza

Media armonica: è il reciproco della media dei reciproci, idonea a mediare rapporti tra 2 variabili

$$m_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Media geometrica: è la radice ennesima del prodotto di n dati, idonea per mediare tassi

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Indici di tendenza centrale resistenti

Trimmed mean: media aritmetica nella quale non vengono considerate le code della distribuzione (es. il 5% dei dati)

M-estimators (Maximum likelihood estimators): media aritmetica pesata, dove il peso è funzione della distanza dal valore centrale; si differenziano per la funzione di assegnazione dei pesi

Indici di dispersione (1/4)

Quantili: misure di posizione non centrale, sono valori che dividono la serie ordinata in un certo numero di parti di uguale numerosità

Percentili: dividono la serie ordinata in 100 parti uguali; il p-esimo percentile di una distribuzione è quel valore con p% dei valori inferiori ad esso (in statistica inferenziale sono interessanti 1, 2,5, 5, 95, 97,5 e 99 esimo percentile)

Quartili: dividono la serie ordinata in 4 parti uguali: 25 esimo, 50 esimo (la mediana) e 75 esimo percentile

N.B. L'intervallo tra il 25 esimo e il 75 esimo percentile si chiama **distanza interquartile**

Decili: dividono la serie ordinata in 10 parti uguali: 10, …, 90 esimo percentile

Indici di dispersione (2/4)

Campo di variazione o Range: $x_{max} - x_{min}$

Scarti dalla media

1. Devianza o Sum of Squares: $SS = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

2. Varianza o Mean Square o Quadrato Medio:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

nel caso in cui i dati siano frequenze:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

nel caso in cui i dati siano proporzioni:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$$

Indici di dispersione (3/4)

3. Deviazione Standard o Standard Deviation:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}$$

4. Coefficiente di Variazione o CV: $CV = \frac{s}{\bar{x}} 100$

Indici di dispersione (4/4)

Teorema di Tchebysheff: indipendentemente dalla distribuzione, fissata una costante K, l'intervallo $\bar{x} \pm Ks$ (dove s è la deviazione standard) contiene almeno $\left(1 - \frac{1}{K^2}\right)$ dati.

→ se K=2, allora l'intervallo contiene almeno il 75% dei dati
se K=3, allora l'intervallo contiene almeno l'89% dei dati

Approssimativamente, in una distribuzione simmetrica e «a campana»:

l'intervallo $\bar{x} \pm s$ contiene il 68% dei dati;

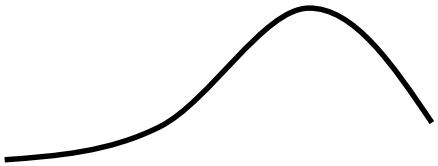
l'intervallo $\bar{x} \pm 2s$ contiene il 95% dei dati;

l'intervallo $\bar{x} \pm 3s$ contiene quasi il 100% dei dati.

Pre-requisiti – Statistica Descrittiva

Indici di forma

Asimmetria o Skewness: $\dfrac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n}}{\sigma^3}$



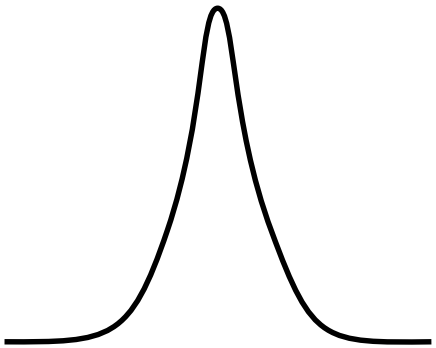
negativa

positiva

Curtosi o Kurtosis: $\dfrac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n}}{\sigma^4}$

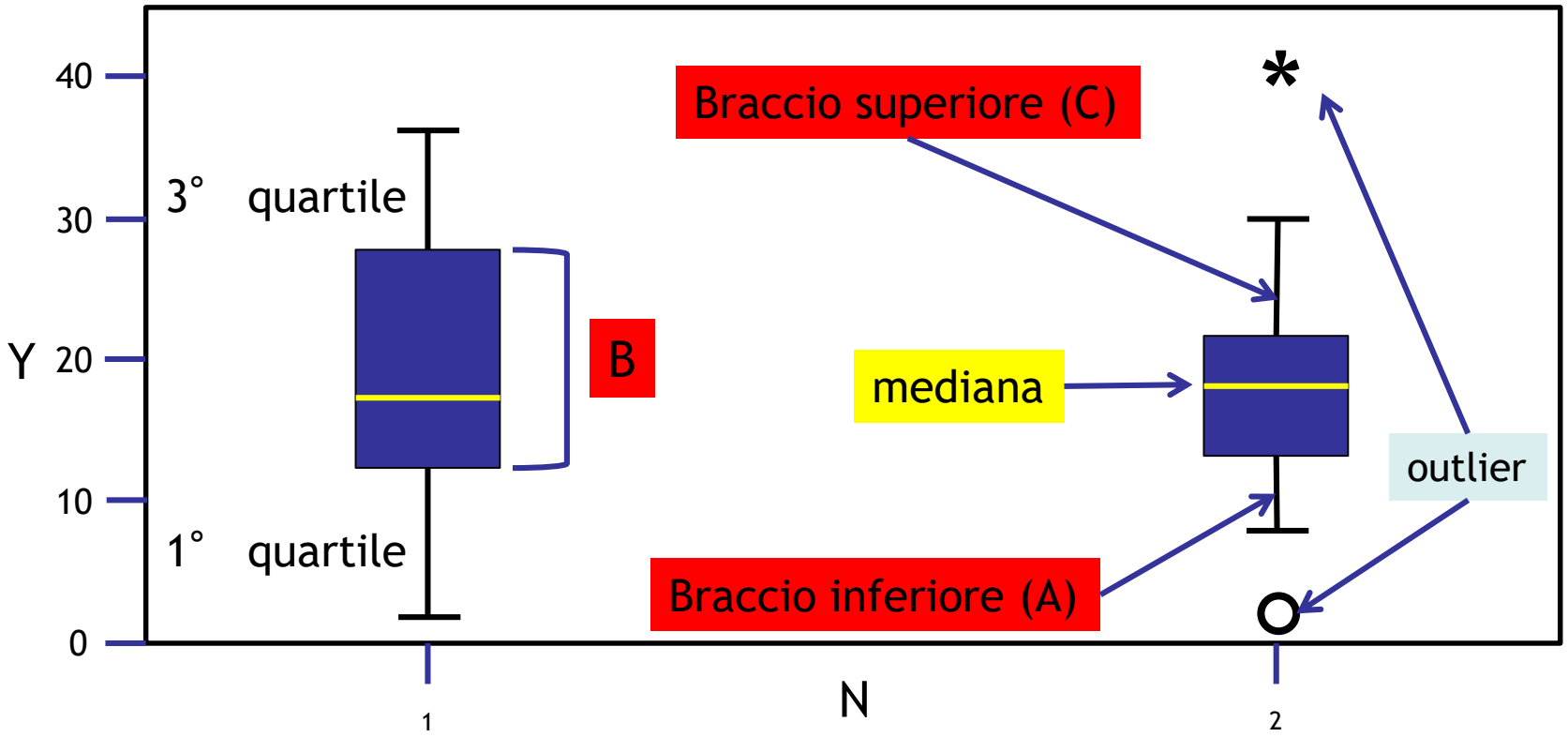
platicurtica

leptocurtica



Analisi Esplorativa dei Dati: Box Plot

Tra i più comuni strumenti grafici della Exploratory Data Analysis (oltre ai grafici a barre e agli istogrammi) ricordiamo il **Box Plot.**



Convenzioni Box Plot (1/2)

- ✓ rappresentazione grafica della distribuzione dei dati (per data set sufficientemente numerosi)
- ✓ sull'asse delle ordinate (Y) sono riportati in scala i valori assunti dalla variabile in esame
- ✓ i dati compresi tra il 1° e il 3° quartile sono rappresentati su piano cartesiano da un rettangolo
- ✓ il rettangolo è tagliato da una linea che rappresenta la mediana (o 2° quartile) a cui corrisponde una frequenza cumulata pari al 50%
- ✓ il braccio (o baffo) inferiore (A) rappresenta la distanza tra il valore minimo della serie di dati e il 1° quartile
- ✓ B è la distanza interquartile tra il 1° e il 3° quartile
- ✓ il braccio superiore (C) rappresenta la distanza tra il valore massimo della serie di dati e il 3° quartile

Convenzioni Box Plot (2/2)

- ✓ un braccio (A o C) può avere una lunghezza massima pari a 1.5 x B
- ✓ se A è maggiore di 1.5 x B, allora il valore minimo viene posto nel grafico fuori dal braccio e rappresentato come un dato «outlier»
- ✓ se il valore del 1° quartile è anche il valore minimo dei dati, allora il braccio non è rappresentato
- ✓ se C è maggiore di 1.5 x B, allora il valore massimo viene posto nel grafico fuori dal braccio e rappresentato come un dato «outlier»
- ✓ se il valore del 3° quartile è anche il valore massimo dei dati, allora il braccio non è rappresentato

O dato inferiore (superiore) rispetto al valore del 1° (3°) quartile diminuito (sommato) di un valore compreso tra 1.5 e 3 moltiplicato per B

* dato inferiore (superiore) rispetto al valore del 1° (3°) quartile diminuito (sommato) di un valore maggiore di 3 moltiplicato per B

Popolazione e Campione

POPOLAZIONE

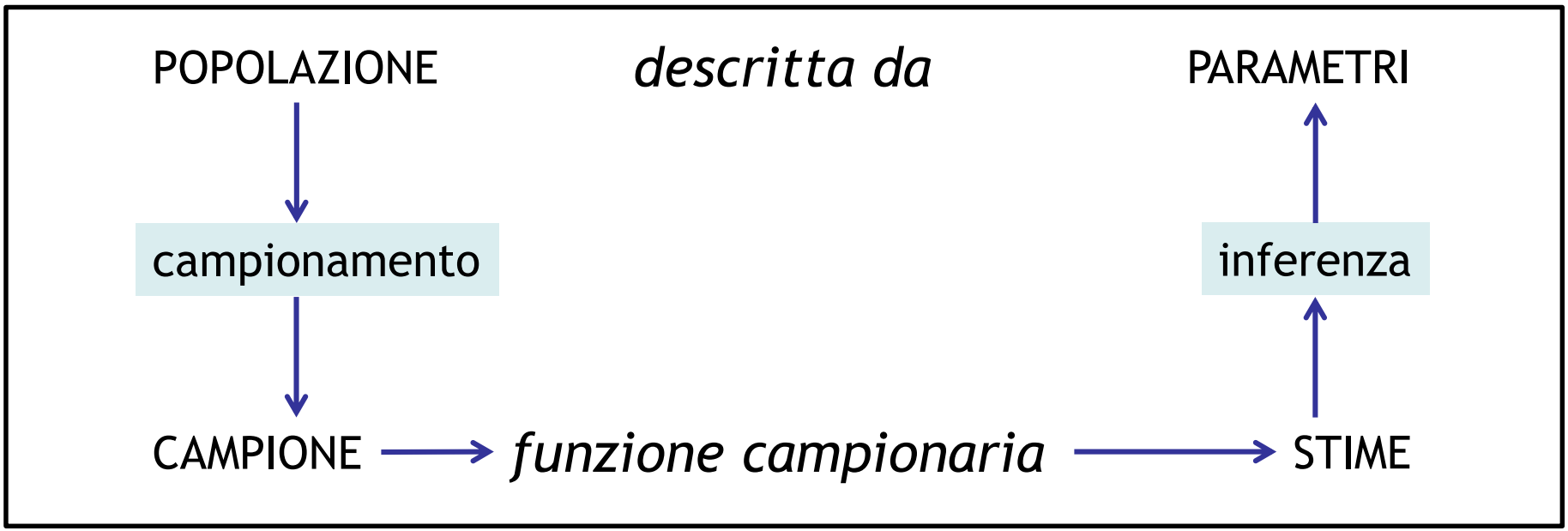
- ✓ insieme di tutte le manifestazioni relative a un certo fenomeno
- ✓ può essere finito o infinito
- ✓ in genere ci si occupa di popolazioni molto grandi

CAMPIONE

- ✓ sottoinsieme della popolazione
- ✓ se estratto casualmente, rappresenta la popolazione in esame

Obiettivi dell'Inferenza Statistica

1. **Stima dei parametri della popolazione**
2. Test delle ipotesi



Distribuzioni di probabilità

Variabile Casuale: variabile che assegna un valore a ciascuna realizzazione di un esperimento; può essere *discreta* o *continua*

Distribuzione di probabilità: funzione che rappresenta la probabilità associata a ciascun valore della variabile casuale

→ a VC discrete/continue si associano distribuzioni di probabilità discrete/continue

→ la distribuzione di probabilità è la distribuzione teorica della popolazione, **i cui parametri si intendono indagare**

→ la media di una distribuzione di probabilità è detta *valore atteso* della variabile casuale

Distribuzioni di probabilità d'interesse

- **Distribuzione Binomiale**
- **Distribuzione Normale**
- **Distribuzione del t di Student**
- **Distribuzione F di Fisher**
- **Distribuzione del X^2 (chi quadro)**

- Distribuzione di Poisson
- Distribuzione del Q
- Distribuzione Binomiale Negativa
- Distribuzione Gamma
- Distribuzione Beta
- Distribuzione di Cauchy
- Distribuzione di Gumbel
- Distribuzione di Weibull
- Distribuzione Log-Normale
- …

Distribuzione Normale o Gaussiana (1/2)

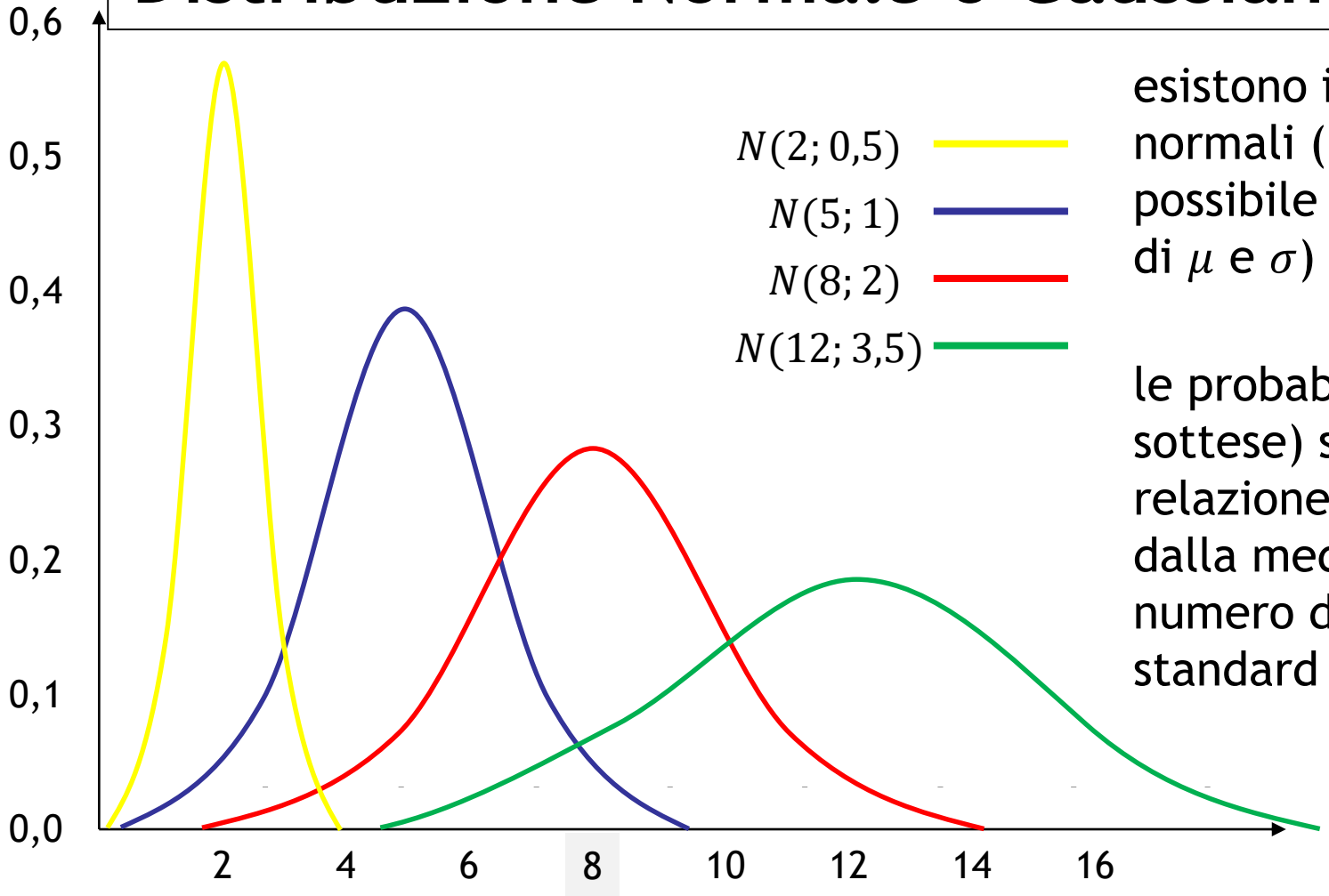
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Principali proprietà

- la variabile casuale x è compresa tra $-\infty$ e $+\infty$
- è completamente definita da 2 parametri (**media** e **varianza**) e viene sinteticamente indicata con $N(\mu; \sigma^2)$
- è simmetrica intorno alla media ed è a forma di campana
- ha il massimo in $x = \mu$ e 2 flessi in $x = \mu \pm \sigma$

N.B. L'integrale di $N(\mu; \sigma^2)$ tra x e $+\infty$ fornisce la probabilità che un'unità sperimentale abbia un valore superiore a x

Distribuzione Normale o Gaussiana (2/2)



esistono infinite curve normali (una per ogni possibile combinazione di μ e σ)

le probabilità (superfici sottese) sono in relazione alla distanza dalla media, misurata in numero di deviazioni standard

Distribuzione Normale Standardizzata

- ✓ Tra le curve normali, si fa spesso riferimento alla cosiddetta "Normale Standardizzata", che si indica con $N(0;1)$ e quindi ha media = 0 e varianza = deviazione standard = 1.
- ✓ Tutte le normali possono essere ricondotte alla normale standardizzata, sottraendo a ogni dato la media e dividendo per la deviazione standard $\left(z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.
- ✓ La distribuzione normale standardizzata è detta anche Distribuzione Z.
- ✓ L'integrale della normale $N(\mu;\sigma^2)$ tra x e $+\infty$ è calcolabile, ma con notevole difficoltà, mentre l'integrale di Z è tabulato.

Stimatori (1/2)

Uno **stimatore** è una statistica ottenuta da un campione che stima un parametro della popolazione. Si indica con lettera latina, mentre i parametri della popolazione si indicano con lettera greca.

La media campionaria $\bar{x}$ è uno stimatore della media della popolazione μ.

La varianza campionaria s^2 è uno stimatore della varianza della popolazione σ^2.

La deviazione standard campionaria s è uno stimatore della deviazione standard della popolazione σ.

Stimatori (2/2)

Proprietà

Non distorsione (accuratezza): la media di tutti i possibili valori dello stimatore è uguale al valore del parametro della popolazione.

Consistenza: all'aumentare della dimensione del campione lo stimatore tende al valore del parametro.

Efficienza (precisione): è più efficiente, tra tutti gli stimatori non distorti, quello che ha minore varianza campionaria.

Stimatori di media e varianza

Il miglior stimatore della media di una popolazione è la media del campione:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Il miglior stimatore della varianza di una popolazione è:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

N.B. Se si divide per n anziché per n-1, lo stimatore risulta distorto!

Non vi sono stimatori non distorti della deviazione standard: è per questo che si usa molto la varianza.

Statistica Inferenziale - Stima puntuale dei parametri

dimostrazione...

Campioni		Statistiche				
$x1$	$x2$	media	var(/n)	var(/n-1)	dev.st(/n)	dev.st(/n-1)
2	2	2,0	0,00	0,00	0,00	0,00
2	3	2,5	0,25	0,50	0,50	0,71
2	5	3,5	2,25	4,50	1,50	2,12
2	6	4,0	4,00	8,00	2,00	2,83
3	2	2,5	0,25	0,50	0,50	0,71
3	3	3,0	0,00	0,00	0,00	0,00
3	5	4	1,00	2,00	1,00	1,41
3	6	4,5	2,25	4,50	1,50	2,12
5	2	3,5	2,25	4,50	1,50	2,12
5	3	4,0	1,00	2,00	1,00	1,41
5	5	5,0	0,00	0,00	0,00	0,00
5	6	5,5	0,25	0,50	0,50	0,71
6	2	4,0	4,00	8,00	2,00	2,83
6	3	4,5	2,25	4,50	1,50	2,12
6	5	5,5	0,25	0,50	0,50	0,71
6	6	6,0	0,00	0,00	0,00	0,00
Media stimatori		**4**	**1,25**	**2,50**	**0.88**	**1,24**
Varianza stimatori		1,25	1,844	7,375	0,484	0,969
Deviazione Standard stimatori		1,118	1,358	2,716	0,696	0,984

Universo	$\{2, 3, 5, 6\}$
Media	**4**
Deviazione Standard	**1,6**
Varianza	**2,5**

Possibili campioni di numerosità 2 ottenibili per estrazione casuale con re-immisione

Teorema del Limite Centrale

Una variabile che derivi dalla somma di altre tende a essere distribuita normalmente. Tante più variabili concorrono alla somma, tanto più l'approssimazione è buona.

Le medie campionarie, anche se i campioni sono tratti da popolazioni con distribuzioni diverse dalla normale, tendono ad essere distribuite normalmente.
L'approssimazione è tanto maggiore quanto maggiore è la numerosità campionaria.

Distribuzione campionaria delle medie

la distribuzione campionaria della media di un campione di numerosità n, estratto casualmente da una popolazione con media μ e varianza σ^2, ha:

media = μ (stimatore non distorto)

varianza = $\frac{\sigma^2}{n}$

deviazione standard = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Inoltre, per il teorema del limite centrale, se n è sufficientemente grande, la distribuzione delle medie campionarie è normale.

Errore Standard della media

La deviazione standard della distribuzione delle medie campionarie, più piccola di σ di un fattore $\frac{1}{\sqrt{n}}$, si chiama **Errore Standard** o deviazione standard della media o errore di campionamento della media.

$$es = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

N.B. Se siamo interessati alla variabilità delle misurazioni, usiamo la deviazione standard. Se invece vogliamo mettere in evidenza l'errore che si commette stimando la media della popolazione a partire dalla media campionaria, calcoliamo l'errore standard della media. Va da sé che ogni volta che estraiamo un campione da una popolazione, la sua media varia.

Stime per intervalli (1/2)

Oltre al valore puntuale di una stima, è interessante conoscere qual è il **margine di errore connesso alla stima** stessa.

Si possono stabilire dei limiti entro i quali si ha una certa «confidenza» $(1 - \alpha)$ che sia compreso il vero valore del parametro nella popolazione.

Questi limiti si chiamano **LIMITI FIDUCIALI** e l'intervallo che definiscono si definisce **INTERVALLO FIDUCIALE** o **INTERVALLO DI CONFIDENZA.**

Stime per intervalli (2/2)

La stima di un parametro fatta a partire da un campione, corredata dai suoi limiti fiduciali, è detta **STIMA PER INTERVALLI**.

I valori usuali di α sono 0,01, 0,05 e 0,1, che danno luogo, rispettivamente, agl'intervalli fiduciali o intervalli di confidenza del 99%, 95% e 90%.

Per definire un intervallo di confidenza si utilizzano le distribuzioni campionarie.

Intervallo di confidenza di una media (σ noto) (1/4)

Data una popolazione di cui si conosce la deviazione standard σ e di cui si vuole stimare la media, si estrae da essa un campione di numerosità n.

Facendo riferimento alla distribuzione delle medie campionarie, sappiamo che la media del campione appartiene alla popolazione di medie campionarie, la quale ha:

- distribuzione normale;
- stessa media della popolazione di partenza;
- deviazione standard = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si tratta, in questa distribuzione normale, di individuare l'intervallo che esclude $\alpha/2$ per lato. In tal modo questo intervallo avrà probabilità $(1-\alpha)$ di includere la vera media della popolazione.

Intervallo di confidenza di una media (σ noto) (2/4)

Se σ è noto, si fa riferimento alla distribuzione $Z = N(0;1)$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \quad \text{con} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Definito un grado di confidenza α, si ha:

$$P\left[\mu - z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n}) \leq \bar{x} \leq \mu + z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})\right] = (1 - \alpha)$$

e di conseguenza

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})\right] = (1 - \alpha)$$

Intervallo di confidenza di una media (σ noto) (3/4)

Fissando, ad esempio, il grado di confidenza $(1-\alpha)=0{,}95$ e conoscendo il valore tabulato $z_{\alpha/2}=1{,}96$, ne consegue che l'intervallo di confidenza della media sarà:

$$P[\bar{x}-1{,}96(\sigma/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{x}+1{,}96(\sigma/\sqrt{n})]=0{,}95$$

Valori critici usuali di $z_{\alpha/2}$ sono:

$z_{0{,}05}=1{,}64$ (per confidenza del 90%);

$z_{0{,}025}=1.96$ (per confidenza del 95%);

$z_{0{,}005}=2{,}57$ (per confidenza del 99%).

Intervallo di confidenza di una media (σ noto) (4/4)

$z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ è la quantità che viene aggiunta e sottratta alla media campionaria per avere l'intervallo. Si chiama **massimo errore di stima**, ed è un indicatore della precisione della stima.

A parità di σ, i limiti fiduciali si restringono all'aumentare di:

1) α (e quindi al diminuire del grado di confidenza)

→ si esclude un'area di curva maggiore, ma aumenta la possibilità che i limiti non contengano il vero valore di μ

2) n

→ non vi sono controindicazioni, se non il costo o l'onere di un campione più grande

Intervallo di confidenza di una media (σ ignoto) (1/2)

Ipotizziamo che dal campione si debbano stimare sia la media che la deviazione standard. In questo caso, non si può usare la distribuzione di Z, poiché per usare Z occorre conoscere σ. Si deve pertanto ricorrere alla distribuzione **t di Student**.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \qquad \text{con} \qquad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Analogamente a quanto visto in precedenza, i limiti fiduciali per una confidenza $(1 - \alpha)$ saranno dati da:

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(s/\sqrt{n})$$

dove si considera una distribuzione di t con $n - 1$ gradi di libertà

Gli intervalli fiduciali saranno più "larghi" di quelli con σ nota, poiché vi sono due stime ($\bar{x}$ e s) soggette a fluttuazioni campionarie.

Intervallo di confidenza di una media (σ ignoto) (2/2)

ESEMPIO

Avendo rilevato produzioni di un pascolo, si sono ottenuti i seguenti valori (t ha^{-1} di sostanza secca): 3,6; 4,3; 4,8; 3,3; 3,2; 2,8; 4,1; 4,8; 3,3. Calcolare la produzione media ed i suoi limiti fiduciali al 90%, al 95% e al 99%.

SOLUZIONE

Media	3,800	Valori t tabulati	
Devianza	4,240	α	t_{9-1}
Stima varianza	0,53	0,1	1,860
Stima deviazione standard	0,728	0,05	2,306
Stima errore standard	0,243	0,01	3,355

Limiti fiduciali della media		
α	Limite inferiore	Limite superiore
0,1	3,35	4,25
0,05	3,24	4,36
0,01	2,99	4,61